UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

14 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 $points$)**.**

Une urne contient 9 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge. Il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne et on note leurs couleurs. Soit G l'événement : « Obtenir deux boules de même couleur. »

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n,b,r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.

Démontrer que $g(n,b,r) = \dfrac{1}{72}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$. 0,75 pt

2. Le but de cette question est de trouver les valeurs de n, b et r pour lesquelles la probabilité $g(n,b,r)$ est minimale.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(9,0,0)$, $(0,9,0)$ et $(0,0,9)$. Soit M le point de coordonnées (n,b,r).

a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est : $x+y+z-9=0$. 0,75 pt

b. En déduire que M est un point du plan (NBR). 0,5 pt

c. Démontrer que $g(n,b,r) = \dfrac{1}{72}(OM^2-9)$. 0,5 pt

d. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). 1 pt

e. En déduire les valeurs de n, b et r pour lesquelles la probabilité $g(n,b,r)$ est minimale.

Justifier alors que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{1}{4}$. $0,5+0,25$ pt

3. On suppose que le nombre de boules de chaque couleur a été choisi par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit $\dfrac{1}{4}$.

Un joueur mise 1000 $francs$ puis tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne. S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k $francs$. Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de k. 0,5 pt

b. Déterminer la valeur de k pour que le jeu soit équitable c'est à dire pour que $E(X) = 0$.

0,25 pt

Exercice 2 (5 $points$)**.**

1. Soient a, b, c des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si a et b^n sont premiers entre eux.

1 pt

b. En déduire que si a et b sont premiers entre eux et si a divise le produit $b^n c$, alors a divise c. $0,5\ pt$

2. On se propose dans cette question de déterminer les solutions rationnelles de l'équation suivante :

$$(E)\ :\quad 7x^3+2x^2+2x-5=0$$

a. Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle unique appartenant à l'intervalle $]0,1[$. $1\ pt$

b. En utilisant les résultats de la question 1. **b.** , démontrer que si (E) admet une solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers premiers entre eux, alors p divise 5 et q divise 7. $1\ pt$

c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Q}$ ensemble des rationnels. $0,75\ pt$

3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes. $0,75\ pt$

PROBLEME (10 *points*).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ d'unité graphique $2\,cm$. Dans tout le problème I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie A

Soit f_0 la fonction définie sur I par $f_0(x)=\dfrac{1}{x}$.

Pour tout entier naturel n et tout $x\in I$, on pose $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f_n(t)\,dt$ et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. a. Montrer que pour tout élément x de I, $f_1(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. $0,75\ pt$

b. Etudier les variations de f_0 et de f_1 et dresser leur tableau de variations. $0,5+0,75\ pt$

2. Déterminer suivant les valeurs de x, les positions relatives de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$. $0,75\ pt$

3. Construire $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ dans le même repère. $0,75\ pt$

4. Calculer l'aire du domaine plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\mathrm{e}^2$. $1\ pt$

Partie B

Pour tout entier naturel n et tout $x\in I$, on pose $F_n(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{f_n(t)}{t}\,dt$

1. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la fonction f_n est dérivable sur I. $0,75\ pt$

b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout x dans I, $f'_{n+1}(x)=\dfrac{-f_{n+1}(x)+f_n(x)}{x}$. $0,75\ pt$

2. a. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout entier naturel n et pour tout x dans I,

$$F_n(x)-F_{n+1}(x)=f_{n+1}(x).$$

$0,75\ pt$

b. Vérifier alors que pour tout entier naturel p et tout $x\in I$ on a :

$$\sum_{n=0}^{p} f_n(x)=f_0(x)+F_0(x)-F_p(x)$$

$0,75\ pt$

3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n et tout $x \in I$,

$$f_n(x) = \frac{\ln^n x}{n!\, x}.$$

0,75 pt

b. Démontrer que pour tout entier naturel n et tout $x \in [1, \mathrm{e}]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}.$$

En déduire que la suite $(F_n(\mathrm{e}))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite. $0,25+0,5\ pt$

c. Déduire de la question 2 **b.** $\displaystyle\lim_{p \mapsto +\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!}$. 1 pt